

Aufgabe diepenaufgsbd10

Anna und Laura gehen nach ihrem gemeinsamen Seminarbesuch unabhängig voneinander jeweils mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit in die Cafeteria. Dort trinkt jede von beiden einen Kaffee für 1 Euro. Wenn eine allein erscheint, dann kauft sie sich mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit einen Cookie für einen Euro. Wenn aber beide kommen, dann entscheiden sie sich mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit, sich zusammen einen Cookie für einen Euro zu teilen, und würfeln fair aus, wer den Cookie bezahlt.

a) Zeigen Sie: Wenn Anna die Cafeteria besucht, dann sind im Mittel von ihr Ausgaben von 1.375 Euro zu erwarten. Dasselbe gilt für Laura.

b) Hier wird jetzt keine Bedingung gestellt, dass eine der beiden die Cafeteria besucht oder beide die Cafeteria besuchen. Welche Gesamtausgaben sind von den beiden Frauen im Mittel zu erwarten?

c) Für jeden der drei Fälle, nämlich dass keine, eine oder zwei von den Frauen die Cafeteria besucht, sollen Sie die Frage beantworten: Welche Gesamtausgabe wird mit welcher Wahrscheinlichkeit gemacht?

d) Für jeden der drei Fälle, nämlich dass keine, eine oder zwei von den Frauen die Cafeteria besucht, sollen Sie die Frage beantworten: Welche Gesamtausgabe ist im Mittel zu erwarten?

e) Mit X wird die Zufallsvariable "Anzahl der Cafetariabesucherinnen unter den beiden Frauen" und mit Y die Zufallsvariable "Gesamtausgabe der beiden Frauen" bezeichnet. Wenn man jedem der drei Werte 0,1,2, die X annehmen kann, den laut Aufgabenteil d) im Mittel erwarteten Wert von Y zuordnet, dann bezeichnet man diesen bedingten Erwartungswert als $E(Y|X = x)$. Wenn man diese Zuordnung hinter X schaltet, erhält man eine Zufallsvariable, die man als $E(Y|X)$ bezeichnet. Welche Werte nimmt diese Zufallsvariable jeweils mit welcher Wahrscheinlichkeit an? Hinweis: Das geht ja unmittelbar aus Teil d) hervor, wenn man noch die Verteilung von X berücksichtigt.

f) Mit dem Ergebnis der vorigen Aufgabe kann man sofort die Frage beantworten: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Gesamtausgabe von mindestens 1.5 Euro im Mittel zu erwarten? Betrachten Sie nun aber folgende Argumentation bei der (fehlerhaften) Beantwortung dieser Frage: "Sei x die Anzahl der benötigten Cafetariabesucherinnen. Aus $x \cdot 1.375 \geq 1.5$ folgt $x \geq \frac{3}{11} = \frac{24}{22}$. Nun gilt, weil X ja nur die Werte 0,1,2 annehmen kann, $P(X \geq \frac{24}{22}) = P(X \geq 2) = \frac{1}{4}$ " (Zur Zahl 1.375 sei auf Aufgabenteil a) verwiesen). Wo steckt der Fehler bei dieser Argumentation?