Die Schwimmbadaufgabe zur Stochastik aus dem NRW-Mathematik-Zentralabitur 2019

Eine geeignete Teilaufgabe als Ersatz für die fehlerhafte Teilaufgabe b (2) der Leistungskursversion bzw. c (2) der Grundkursversion

Wenn beispielsweise Lehrer mit Schülern Beispielaufgaben zur Abiturvorbereitung besprechen, dann gibt es natürlich die Möglichkeit, den kritischen Teil b (2) der LK-Version bzw. c (2) der GK-Version einfach wegzulassen.

Eine bessere Möglichkeit besteht darin, eine Ersatz-Teilaufgabe in der folgenden Art zu bringen. Allerdings würde diese Ersatz-Teilaufgabe es nicht unbedingt verdienen, mit 4 Punkten bewertet zu werden.

Vorschlag für eine Ersatz-Teilaufgabe:

Ermitteln Sie die Tageseinnahmen, die der Kiosk-Besitzer von den Jahreskartenbesitzern erwarten kann!

ODER

Ermitteln Sie den Erwartungswert der Einnahmen, die der Kiosk-Besitzer an dem betrachteten Tag von den Jahreskartenbesitzern erhält!

Lösung:

Man zeichnet für die Ausgaben eines Jahreskartenbesitzers ein Baumdiagramm, bei dem in der obersten Ebene die Unterscheidung zwischen dem Fall „Kein Schwimmbadbesuch an dem Tag“ (Wahrscheinlichkeit 0.9) und „Schwimmbadbesuch an dem Tag“ (Wahrscheinlichkeit 0.1) getroffen wird. Für den Fall „Schwimmbadbesuch an dem Tag“ wird nun die weitere Fallunterscheidung mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten 0.2 für 0 Euro, 0.5 für 4 Euro und 0.3 für 12 Euro gemacht. Damit ergibt sich an Hand des Baumdiagramms (bzw. natürlich nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) folgende Verteilung der Ausgaben A für den einzelnen Jahreskartenbesitzer

P(A=4) = 0.1 mal 0.5 = 0.05

P(A=12) = 0.1 mal 0.3 = 0.03

Die Berechnung P(A=0) = 0.9 mal 1 + 0.1 mal 0.2 = 0.92 ist zwar überflüssig, aber zur Kontrolle (0.05 + 0.03 + 0.92 = 1) nicht unsinnig.

Also gilt E(A) = 4 mal 0.05 + 12 mal 0.03 + 0 mal irgendwas = 0.56 Euro

Damit ergibt sich als Erwartungswert für die Gesamteinnahmen, die der Kioskbesitzer von den Schwimmbadbesuchern hat

2000 mal 0.56 = 1120 Euro

Auch wenn das den Schülern nicht gesagt werden muss oder kann: Die Additivität der Erwartungswertbildung gilt immer und setzt keine Unabhängigkeit der aufsummierten Zufallsvariablen voraus, also ist hier der Erwartungswert der Summe aus den 2000 inidividuellen Ausgaben gleich der Summe aus den 2000 Erwartungswerten, also gleich 2000 mal 0.56.