Bemerkung 1 (Hinreichende Bedingung für die Gültigkeit)

Es seien Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(V1) $X_1, \ldots, X_n$ sind stochastisch unabhängig

(V2) X_i sind Bernoulli-verteilt für $i = 1, \ldots, n$ mit dem Parameter p (also $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$ für $i = 1, \ldots, n$).

(V3) Unter der Bedingung $X_i = 0$ nimmt A_i den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit 1 an, für $i = 1, \ldots, n$. Formal: $P(A_i = 0 | X_i = 0) = 1$ für $i = 1, \ldots, n$.

(V4) Unter der Bedingung $X_i = 1$ nimmt A_i die Werte $b_1, b_2, \ldots, b_m$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, \ldots, p_m$ an, wobei $b_j \neq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$, und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - (p_1 + \cdots + p_m) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Sei zur Abkürzung $X := X_1 + \cdots + X_n$ und $S_i = X - X_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} X_j$ für $i = 1, \ldots, n$

Behauptung:

1. X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p. S_i ist binomialverteilt mit den Parametern $n - 1$ und p, für alle $i = 1, \ldots, n$
2. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt $E(A_i | X_i = 1) = b_1 p_1 + b_2 p_2 + \cdots + b_m p_m$
3. **Wenn** für $i = 1, \ldots, n$ die Zufallsvariablen A_i und S_i stochastisch unabhängig sind, dann gilt für alle $x \in \{0, \ldots, n\}$ die Gleichung

$$E(\sum_{i=1}^{n} A_i | X = x) = x \cdot (b_1 p_1 + b_2 p_2 + \cdots + b_m p_m)$$

Beweis:

1. gilt wegen (V1),(V2) (bekanntlich!)
2. folgt aus der Formel für Erwartungswerte und (V4).
3. Es ist im Folgenden immer zu beachten, dass alle $b_j \neq 0$ vorausgesetzt sind und A_i wegen (V3) nur dann einen Wert b_j annehmen kann, wenn X_i den Wert 1 annimmt.

   Für jedes $i = 1, \ldots, n$ und jedes $b \in \{b_1, \ldots, b_m\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(A_i = b | X = x) &= \frac{P(A_i = b \text{ und } X = x)}{P(X = x)} \\
&\overset{\text{weil } b \neq 0}{=} \frac{P(A_i = b \text{ und } X_i = 1 \text{ und } X = x)}{P(X = x)} \\
&\overset{\text{Definition von } S_i}{=} \frac{P(A_i = b \text{ und } X_i = 1 \text{ und } S_i = x - 1)}{P(X = x)} \\
&\overset{\text{weil } b \neq 0}{=} \frac{P(A_i = b \text{ und } S_i = x - 1)}{P(X = x)}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nun mit $P(S_i = x - 1)$ erweitert. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
P(A_i = b|X = x) &= \frac{P(A_i = b \text{ und } S_i = x-1)}{P(S_i = x-1)} \cdot \frac{P(S_i = x-1)}{P(X = x)} \\
&\overset{\text{mit 1.}}{=} P(A_i = b|S_i = x-1) \cdot \frac{\binom{n-1}{x-1} p^{x-1}(1-p)^{(n-1)-(x-1)}}{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}} \\
&= P(A_i = b|S_i = x-1) \cdot \frac{x}{np}
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
E(A_i|X = x) &= \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot P(A_i = b_j|X = x) \\
&\overset{\text{obige Gleichung}}{=} \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot P(A_i = b_j|S_i = x-1) \cdot \frac{x}{np} \\
&= \frac{x}{np} \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot P(A_i = b_j|S_i = x-1)
\end{aligned}$$

Nun wird aber ja vorausgesetzt, dass S_i und A_i jeweils stoschastisch unabhängig voneinander sind, deshalb kann man in der Gleichung die Bedingung $S_i = x - 1$ jeweils weglassen und erhält

$$E(A_i|X = x) = \frac{x}{np} \sum_{j=1}^{m} b_j P(A_i = b_j)$$

Durch Aufsummieren über i von 1 bis n erhält man, weil wegen der Verteilungsannahmen die rechte Seite nicht von i abhängt, den folgenden Ausdruck. Bei diesem Ausdruck ist zu beachten, dass man dort das i einfach durch 1 ersetzen konnte:

$$\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{n} A_i|X = x) &= \sum_{i=1}^{n} E(A_i|X = x) \\
&= n \cdot \frac{x}{np} \sum_{j=1}^{m} b_j P(A_1 = b_j) \\
&= x \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{P(A_1 = b_j)}{p} \\
&= x \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{P(A_1 = b_j)}{P(X_1 = 1)} \\
&= x \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{P(A_1 = b_j \text{ und } X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)}
\end{aligned}$$

denn A_1 nimmt positive Werte nur für $X_1 = 1$ an. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{n} A_i|X = x) &= x \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j P(A_1 = b_j|X_1 = 1) \\
&\overset{\text{(V4)}}{=} x \cdot (b_1 p_1 + \cdots + b_m p_m)
\end{aligned}$$